Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: Juin 2014

Concours en Mathématiques Physique

Correction de l'Épreuve de Mathématiques II

Exercice

les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   a) Conséquence immédiate de l'identité de Bezout.

   b) Les éléments $k \in [[1, n^2]]$ qui ne sont pas premiers avec n^2 sont αn où α entier compris entre 1 et n donc de cardinal n d'où le cardinal des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ est $n(n-1)$.

2) a) Il suffit de voir que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à tout couple (P, Q) associée $f(P, Q) = \frac{1}{2}P(0)Q(1) + \frac{1}{2}P(1)Q(0)$ est une forme bilinéaire symétrique satisfaisant $q(P) = f(P, P)$.

   b) $P(0)P(1) = \left(\frac{1}{2}(P(0) + P(1))\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(P(0) - P(1))\right)^2$. Soit alors $f_1 = \frac{1}{2}(P(0) + P(1))$ et $f_2 = \frac{1}{2}(P(0) - P(1))$. Il est clair que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes vérifiant $q(P) = a_1^2 - a_2^2$.

   c) On pose $f_3 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ qui à tout P associé $P(-1)$. En vérifie aisément que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\left(\mathbb{R}_2[X]\right)^*$. Sa base préduale répond à la question.

3) Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{array}$$

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x-y)$.

   b) Les solutions sont $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   c) • cas de $(0, 0)$: donc $f(x, x) - f(0, 0) = 2x^4 \leq 0$. et $f(x, 0)_f(0, 0) = x^4 - 2x \sim -2x$ qui ne garde pas un signe constant donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum.

   • cas de $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: le jacobien de f en ces points est égal $\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ symétrique définie positive donc minimpum local.

Problème

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) On a $F \subset F + G \Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp$ d'où $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$
Rèciproquement, soit $X \in F^\perp \cap G^\perp$ et $z \in F+G$ alors $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in F$ et $z_2 \in G$ donc $<X,Z>=<X,Z_1>+<X,Z_2>=0$ d'où $X \in (F+G)^\perp$
conclusion $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2) $(F \cap G)^\perp = \left((F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp\right)^\perp = \left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Partie II

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $0 < p < n$. Soit A appartenant à $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = \begin{bmatrix} I_p & {}^tA \\ A & 0_{n-p} \end{bmatrix}.$$

A- Etude des propriétés de A, ${}^tA$ et S

1) ${}^tS = S$ donc S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) a) Montrer que

i) Soit $X \in \operatorname{Ker} A$ montrons que $X \in [\operatorname{Im}({}^tA)]^\perp$ en effet soit $Y \in \operatorname{Im}({}^tA)$ alors $Y = {}^tAZ$, $<X,Y>={}^tXY={}^tX{}^tAZ={}^t(AX)Z=0$ car $AX=0$
$\dim([\operatorname{Im}({}^tA)]^\perp) = p - \dim(\operatorname{Im}({}^tA)) = p - \dim(I(A)) = \dim(\operatorname{Ker}(A))$ d'où $\operatorname{Ker} A = [\operatorname{Im}({}^tA)]^\perp$.

ii) D'après la question précédente on a $\operatorname{Ker}({}^tA) = [\operatorname{Im}(A)]^\perp$.

b) En déduire que

i) $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(A) \overset{\perp}{\oplus} [\operatorname{Ker}(A)]^\perp = \operatorname{Ker}(A) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}({}^tA)$.

ii) $\mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}({}^tA) \overset{\perp}{\oplus} [\operatorname{Ker}({}^tA)]^\perp = \operatorname{Ker}({}^tA) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(A)$.

c) i) A est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ si et seulement si $[\operatorname{Im}({}^tA)]^\perp = \{0\}$ si et seulement si $\operatorname{Im}({}^tA) = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tA$ est surjective.

ii) Si A est injective on a $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ et par suite $p = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) = \dim(\operatorname{Im}({}^tA)) = \operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}(A) \leq n-p$.

3) a) Soit $X \in \operatorname{Ker}(S)$ on écrit $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ alors $SX = 0$ ce qui donne $\begin{cases} X_1 + {}^tAX_2 = 0 \\ AX_1 = 0 \end{cases}$ ce qui équivaut

$\bar{A}$ $\begin{cases} X_1 + \in \operatorname{Ker}(A) \\ X_1 = {}^tA(-X_2) \in \operatorname{Im}({}^tA) \end{cases} \Rightarrow X_1 \in \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Im}({}^tA) = \{0\}$ d'après 2)b)i) et par suite ${}^tAX_2 = 0$

d'où $X_2 \in \operatorname{Ker}({}^tA)$ et donc

$$X = \begin{bmatrix} 0_{p,1} \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad X_2 \in \operatorname{Ker}({}^tA).$$

La réciproque est évidente d'où $\operatorname{Ker}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{p,1} \\ X_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } X_2 \in \operatorname{Ker}({}^tA) \right\}$.

b) $\mathrm{Im}(S) = \left(\mathrm{Ker}({}^tS)\right)^{\perp} = (\mathrm{Ker}\, S)^{\perp}$ d'où

$$\mathrm{Im}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ AX_2 \end{bmatrix} : X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

B- Etude des valeurs propres de ${}^tAA$ et $A{}^tA$

Pour tout réel λ, on note par :

$$U_\lambda = \mathrm{Ker}({}^tAA - \lambda I_p),$$
$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(A{}^tA - \lambda I_{n-p}).$$

1) ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (respectivement $A{}^tA \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$) de plus ${}^t\left({}^tAA\right) = {}^tAA$ (respectivement ${}^t\left(A{}^tA\right) = A{}^tA$) donc ${}^tAA \in S_p(\mathbb{R})$ (respectivement $A{}^tA \in S_{n-p}(\mathbb{R})$)
de plus $< {}^tAAX, X > = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geq 0$ (respectivement $< A{}^tAX, X > = {}^t({}^tAX){}^tAX = \left\|{}^tAX\right\|^2 \geq 0$) et donc ${}^tAA \in S_p^+(\mathbb{R})$ (respectivement $A{}^tA \in S_{n-p}^+(\mathbb{R})$).

2) Soit λ (respectivement β) valeur propre de ${}^tAA$ (respectivement $A{}^tA$) donc $< {}^tAAX, X > = \lambda \|X\|^2 = \|AX\|^2$ (respectivement $< A{}^tAX, X > = \beta \|X\|^2 = \left\|{}^tAX\right\|^2$) d'où les valeurs propres sont positives.

3) On a $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}({}^tAA)$ réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$ alors ${}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0$ d'où $\|AX\|^2 = 0$ soit $AX = 0$ et donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$ en fin $U_0 = \mathrm{Ker}(A)$ de mÃªme pour $V_0 = \mathrm{Ker}({}^tA)$.

4) Soit λ un réel non nul.

a) $\lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$ donc il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^tAAX = \lambda X$ on remarque que $AX \neq 0$ car si non on aura ${}^tAAX = 0$ et par suite $\lambda X = 0$ ce qui est absurde. Donc on a
$\begin{cases} (A{}^tA)(AX) = \lambda(AX) \\ AX \neq 0 \end{cases}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A{}^tA)$ de même la réciproque.

b) Montrer que

i) Soit $X \in U_\lambda$ donc ${}^tAAX = \lambda X$ en compose par A on obtient $(A{}^tA)(AX) = \lambda(AX)$ d'où $AX \in V_\lambda$ par suite $A\left(U_\lambda\right) \subset V_\lambda$.

ii) Soit $X \in V_\lambda$ donc $A{}^tAX = \lambda X$ en compose par ${}^tA$ on obtient $({}^tAA)({}^tAX) = \lambda({}^tAX)$ d'où ${}^tAX \in U_\lambda$ par suite ${}^tA\left(V_\lambda\right) \subset U_\lambda$.

c) Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tAA$, on a

i) $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$ on a $A\left(U_\lambda\right) \subset V_\lambda$ soit $X \in V_\lambda$ donc ${}^tAAX = \lambda X$ soit $A({}^tAX) = \lambda X$ d'où $X = A(\frac{1}{\lambda}{}^tAX) = AY$ avec $({}^tAA)(Y) = {}^tAA(\frac{1}{\lambda}{}^tAX) = \frac{1}{\lambda}{}^tAA{}^tAX = \frac{1}{\lambda}\lambda{}^tAX = \lambda(\frac{1}{\lambda}{}^tAX) = \lambda Y$ d'où
$\begin{cases} X = AY \\ Y \in U_\lambda \end{cases}$
par suite $X \in A(U_\lambda)$ d'où $A(U_\lambda) = V_\lambda$.

ii) De même on a : ${}^tA\left(V_\lambda\right) = U_\lambda$.

d) $\dim(V_\lambda) = \dim(A(U_\lambda)) \leq \dim(U_\lambda) = \dim({}^tA(V_\lambda)) \leq \dim(V_\lambda)$
d'où $\dim(U_\lambda) = \dim(V_\lambda)$.

5) Application :

$n = 4$, $p = 3$ et $A = (1, -1, 1)$ soit ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A{}^tA = (3)$ soit $\mathrm{Sp}({}^tAA) = \{3\}$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$ et $\lambda \neq 0$ donc $\lambda = 3$ finalement $\mathrm{Sp}(A{}^tA) = \{0, 3\}$.

$V_3 =< 1 >$ et par suite $U_3 = ^t A(V_3) =< ^t(1,-1,1) >$

$X = ^t(x,y,z) \in U_0 = \mathrm{Ker}(^tAA)$ équivaut à $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

donc $U_0 =< ^t(1,0,-1), ^t(0,1,1) >$.

C- Etude des valeurs propres de S

Pour tout réel λ, on note par :

$$F_\lambda = \mathrm{Ker}(S - \lambda I_n).$$

1) a) $F_0 = \mathrm{Ker}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{p,1} \\ X_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } \quad X_2 \in \mathrm{Ker}(^tA) \right\}$. d'après $A)3)a)$.

b) $0 \notin \mathrm{Sp}(S)$ si et seulement si ^tA est injective.

c) $F_1 = \mathrm{Ker}(S - I_n)$ soit $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ $X \in F_1$

siginifie

$\begin{bmatrix} I_p & ^tA \\ A & 0_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$

soit

$\begin{cases} X_1 + ^t AX_2 = X_1 \\ AX_1 = X_2 \end{cases}$

d'où

$\begin{cases} ^tAX_2 = 0 \\ AX_1 = X_2 \end{cases}$

donc $X_2 \in \mathrm{Ker}(^tA) \cap \mathrm{Im}(A) = \{0\}$ soit

$\begin{cases} X_2 = 0 \\ AX_1 = 0 \end{cases}$

finalement

$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $X_1 \in \mathrm{Ker}(A)$ d'où $F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_1 \in \mathrm{Ker}(A) \right\}$.

d) On a $1 \notin \mathrm{Sp}(S)$ siginfie A est injective.

2) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S) \setminus \{0,1\}$ et $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ avec $X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$ tels que $SX = \lambda X$ montrons que $X_1 = 0$ èquivaut Ã $X_2 = 0$

$SX = \lambda X$ si et seulement si

$$\begin{cases} X_1 + ^t AX_2 = \lambda X_1 & (1) \\ AX_1 = \lambda X_2 & (2) \end{cases}$$

si $X_1 = 0$ l'èquation (2) donne $\lambda X_2 = 0$ or $\lambda \neq 0$ donc $X_2 = 0$
si $X_2 = 0$ l'èquation (1) donne $X_1 = \lambda X_1$ or $\lambda \neq 1$ donc $X_1 = 0$ d'où l'èquivalence.

3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, on pose:

$$H_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_p \\ \frac{1}{\lambda} A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

a) Soit $Y \in H_\lambda\left(U_{\lambda(\lambda-1)}\right)$ donc $Y = H_\lambda X$ avec $X \in U_{\lambda(\lambda-1)}$ soit

$$\begin{cases} Y = H_\lambda X \\ {}^tAAX = \lambda(\lambda-1)X \end{cases}$$

donc

$$SY = SH_\lambda X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_p + \frac{1}{\lambda}{}^tAA \\ A \end{bmatrix}\left(X\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} X + \frac{1}{\lambda}{}^tAAX \\ AX \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} X + (\lambda-1)X \\ AX \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \lambda X \\ AX \end{bmatrix} =$$

$$\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} X \\ \frac{1}{\lambda}AX \end{bmatrix}\right) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_p \\ \frac{1}{\lambda}A \end{bmatrix}\left(X\right)\right)$$

soit $SY = \lambda\left(H_\lambda(X)\right) = \lambda Y$ d'où la première inclusion.

Réciproquement, Soit $X \in F_\lambda$ ce qui signifie $SX = \lambda X$; $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} X_1 + {}^tAX_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda X_2 \end{cases}$$

Soit alors $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \frac{1}{\lambda}AX_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I_p \\ \frac{1}{\lambda}A \end{bmatrix}\left(X_1\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_p \\ \frac{1}{\lambda}A \end{bmatrix}\left(\sqrt{2}X_1\right)\right) = H_\lambda(Y)$

avec $Y = \sqrt{2}X_1$

Vérifions que $Y \in U_{\lambda(\lambda-1)}$, en effet

${}^tAA(Y) = \sqrt{2}\,{}^tAAX_1 = \sqrt{2}\,{}^tA(\lambda X_2) = \sqrt{2}\lambda\,{}^tAX_2 = \sqrt{2}\lambda(1-\lambda)X_1 = \lambda(1-\lambda)(\sqrt{2}X_1) = \lambda(1-\lambda)Y$

D'où l'égalité $F_\lambda = H_\lambda\left(U_{\lambda(\lambda-1)}\right)$.

b) si λ est une valeur propre de S alors $F_\lambda \neq \{0\}$ et par suite $H_\lambda\left(U_{\lambda(\lambda-1)}\right) \neq \{0\}$ c'est à dire $\lambda(\lambda-1)$ est une valeur propre de ${}^tAA$.

Réciproquement si $\lambda(\lambda-1)$ est une valeur propre de ${}^tAA$ alors il existe $X \neq \{0\}$ et $X \in U_{\lambda(\lambda-1)}$. On a $H_\lambda X = \begin{bmatrix} X \\ AX \end{bmatrix} \neq 0$ donc $F_\lambda \neq \{0\}$ et par suite λ est une valeur propre de S.

En déduire que λ est une valeur propre de S si et seulement si $\lambda(\lambda-1)$ est une valeur propre de ${}^tAA$.

c) si $\frac{1}{2} \in \mathrm{Sp}(S)$ alors $F_{\frac{1}{2}} \neq \{0\}$ ce qui donne $U_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} \neq \{0\}$ donc $\frac{-1}{4} \in \mathrm{Sp}({}^tAA) \subset \mathbb{R}_+$ ce qui est impossible.

d) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ alors $F_\lambda \neq \{\dot{0}\}$ donc $U_{\lambda(\lambda-1)} \neq \{0\}$ par suite $\lambda(\lambda-1) \subset \mathbb{R}_+$ comme $\lambda \notin \{0,1\}$ on a $\lambda(\lambda-1) > 0$ ce qui donne $\lambda \notin [0,1]$.

a) $\Sigma S + S\Sigma = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & {}^tA \\ A & 0_{n-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p & {}^tA \\ A & 0_{n-p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} I_p & {}^tA \\ -A & 0_{n-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p & -{}^tA \\ A & 0_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2I_p & {}^tA \\ 0_{n-p,p} & 0_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{bmatrix} = I_n + \Sigma$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

i) Soit $X \in F_\lambda$ montrons que $\left(a_\lambda I_n + \Sigma\right)(X) \in F_{1-\lambda}$ c'est à dire $S\left(a_\lambda I_n + \Sigma\right)X = (1-\lambda)\left(a_\lambda I_n + \Sigma\right)X$ ou encore $a_\lambda \lambda X + S\Sigma X = (1-\lambda)a_\lambda X + (1-\lambda)\Sigma X$ soit $a_\lambda \lambda X + (I_n + \Sigma - \Sigma S)X = (1-\lambda)a_\lambda X + (1-\lambda)\Sigma X$ ce qui donne $(a_\lambda\lambda + 1)X = (1-\lambda)a_\lambda$ d'où il suffit de choisir $(a_\lambda\lambda + 1) = (1-\lambda)a_\lambda$ c'est Ã dire $a_\lambda = \dfrac{1}{1-2\lambda}$ ceci est possible car $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}(S)$).

ii) Puisque $a_\lambda I_n + \Sigma$ est injectif on a $\dim F_\lambda \leq \dim F_{1-\lambda}$ pour des raisons de symétrie on a $\dim F_{1-\lambda} \leq \dim F_\lambda$ d'où $\dim F_{1-\lambda} = \dim F_\lambda$ et par suite $F_\lambda \neq \{0\}$ si et seulement si $F_{1-\lambda \neq \{0\}}$ ou encore λ est une valeur propre de S si et seulement $1 - \lambda$ est une valeur propre de S.

5) Conséquence immédiate du théorème spectrale et de la question 4)*b*)*ii*).